

MATEMATICĂ

Culegere de exerciții și probleme

– clasa a XII-a –

M2

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. GRUPURI	3
I.1. Legi de compoziție pe o mulțime	3
I.2. Proprietăți ale legilor de compoziție	8
I.2.1. <i>Comutativitate. Asociativitate</i>	9
I.2.2. <i>Element neutru. Elemente simetrizabile</i>	12
TESTE DE EVALUARE	16
I.3. Noțiunea de grup	17
I.4. Reguli de calcul într-un grup	20
I.5. Morfisme de grupuri	24
TESTE DE EVALUARE	28
CAPITOLUL II. INELE ȘI CORPURI	31
II.1. Definiție, exemple de inele	31
II.2. Reguli de calcul într-un inel	34
II.3. Corpuri	38
TESTE DE EVALUARE	40
CAPITOLUL III. INELE DE POLINOAME	41
III.1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp Forma algebrică a unui polinom	41
III.2. Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică	44
III.2.1. <i>Adunarea și înmulțirea polinoamelor</i>	44
III.2.2. <i>Împărțirea polinoamelor. Schema lui Horner</i>	47
III.2.3. <i>Divizibilitatea polinoamelor</i>	50
III.3. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	53
III.3.1. <i>Rădăcini ale polinoamelor</i>	54
III.3.2. <i>Polinoame ireductibile</i>	57
III.4. Relațiile lui Viète	60
III.5. Ecuații algebrice de grad superior	63
III.5.1. <i>Ecuații algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}</i>	64
III.5.2. <i>Ecuații binome, ecuații reciproce</i>	66
TESTE DE EVALUARE	67

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CAPITOLUL I. PRIMITIVE	69
I.1. Primitivele unei funcții. Proprietăți	69
I.2. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare	73
I.3. Metoda schimbării de variabilă Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse	75
I.4. Metoda integrării prin părți	78
TESTE DE EVALUARE	81

CAPITOLUL II. INTEGRALA DEFINITĂ	82
II.1. Definierea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula lui Leibniz-Newton	82
II.2. Proprietăți ale integralei definite	84
II.3. Metode de calcul ale integralelor definite	89
II.3.1. <i>Metoda integrării prin părți</i>	89
II.3.2. <i>Prima metodă de schimbare de variabilă</i>	93
II.3.3. <i>A doua metodă de schimbare de variabilă</i>	98
TESTE DE EVALUARE	100
II.4. Calculul integralelor de funcții raționale	102
II.4.1. <i>Calculul integralei unei funcții raționale simple</i>	102
II.4.2. <i>Calculul integralei unei funcții raționale oarecare</i>	104
TESTE DE EVALUARE	106
CAPITOLUL III. APLICAȚII ALE INTEGRALELOR DEFINITE	109
III.1. Aria unei suprafețe plane	109
TESTE DE EVALUARE	112
III.2. Volumul unui corp de rotație	114
TESTE DE EVALUARE	116
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	118
BIBLIOGRAFIE	157

CAPITOLUL I GRUPURI

1.1. Legi de compoziție pe o mulțime

Notiuni teoretice

Fie M o mulțime nevidă. O aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea M .

Elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numește **compusul lui x cu y** prin legea de compoziție φ .

Adunarea și înmulțirea modulo n

Fie $a, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Numărul natural r care reprezintă restul împărțirii numărului a la n se notează **$a \bmod n$** (se citește "a modulo n") și se numește **restul modulo n** al numărului a .

Pe mulțimea \mathbb{Z} se definesc operațiile algebrice:

" \oplus ": $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \oplus b = (a + b) \bmod n$, numită **adunarea modulo n** ;

" \odot ": $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$, numită **înmulțirea modulo n** .

Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n . Pe mulțimea \mathbb{Z}_n se definesc operațiile:

" $+$ ": $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n** ;

" \cdot ": $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n** .

Fie $\perp : M \times M \rightarrow M$ o aplicație algebrică pe M .

Mulțimea $S \subset M$ se numește **parte stabilă** a mulțimii M în raport cu legea " \perp " dacă $\forall x, y \in S \Rightarrow x \perp y \in S$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |x - y| + 1$, $x, y \in M$.

a) Să se calculeze: $2 \circ 3, 4 \circ 1, (3 \circ 2) \circ 4, 3 \circ (2 \circ 4)$.

b) Să se compare numerele $x = (2 \circ 3) \circ 4$ și $y = 2 \circ (3 \circ 4)$.

c) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 1 = 4, 1 \circ x = 3, x \circ 3 = 1$.

E2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește operația algebrică $x \circ y = xy + x + y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $2 \circ 3$, $4 \circ (-1)$, $(-5) \circ 3$, $(-5) \circ (-4)$, $((-1) \circ 3) \circ (-2)$,
 $3 \circ ((-1) \circ (-3))$.

b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuațiile: $x \circ 2 = 3$, $2 \circ x = 5$, $4 \circ (-x) = 3$, $8 \circ x = 2 \circ 3$, $(x+1) \circ (-1) = 4$, $(3x) \circ 3 = 0$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ în cazurile: $x \circ 1 = x \circ x$, $x \circ x = x \circ (x+1)$, $(x \circ 2) \circ 1 = 3$.

d) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile:

$$(x \circ 1) \circ 2 = x \circ (1 \circ 2), (1 \circ x) \circ (-3) = 1 \circ (x \circ (-3)).$$

E3. Să se calculeze:

a) $\hat{2} + \hat{3}$, $\hat{5} - \hat{4}$, $\hat{4} + \hat{1} + \hat{2}$, $\hat{5} - \hat{3} - \hat{2}$ în \mathbb{Z}_6 ;

b) $\hat{2} + \hat{4}$, $\hat{5} - \hat{2}$, $\hat{5} - \hat{3} - \hat{4}$, $\hat{2} + (\hat{3} + \hat{5})$ în \mathbb{Z}_7 ;

c) $\hat{2} \cdot \hat{3}$, $\hat{4} \cdot \hat{2}$, $\hat{5} \cdot \hat{3}$, $\hat{2} \cdot \hat{3} \cdot (\hat{2} + \hat{3})$ în \mathbb{Z}_8 ;

d) $\hat{3} \cdot (\hat{2} + \hat{3})$, $\hat{4} + \hat{5} \cdot \hat{2}$, $\hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{2} \cdot \hat{3}$, $\hat{4} \cdot (\hat{5} - \hat{4})$ în \mathbb{Z}_{10} .

E4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\hat{x} + \hat{1} = \hat{8}$, $\hat{2} + x = \hat{1}$ în \mathbb{Z}_9 ;

b) $x + (\hat{2} + \hat{3}) = \hat{6}$, $\hat{2}x = \hat{5}$ în \mathbb{Z}_7 ;

c) $x + (x + \hat{1}) = \hat{4}$, $\hat{3}x = \hat{6}$ în \mathbb{Z}_8 ;

d) $\hat{3}x = \hat{5}$, $\hat{4}x = \hat{5}$ în \mathbb{Z}_7 .

E5. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră legea de compoziție $A \circ B = A + B + 2I_2$,
 $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în cazurile: $A \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

E6. Să se alcătuiască tabla operației " \circ " definită pe mulțimea M în cazurile:

a) $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \circ y = |x - y| + 2$;

b) $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

c) $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $x \circ y = x + y - \min(x, y)$;

d) $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$.

E7. Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ se consideră operația $A \circ B = 2A - B, \forall A, B \in \mathcal{M}$.

$B \in \mathcal{M}$.

a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

E8. Pe mulțimea \mathbb{Z} se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Să se arate că următoarele mulțimi sunt părți stabile ale lui \mathbb{Z} în raport cu operația " \circ ":

a) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este impar}\}$;

b) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -1\}$;

c) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$;

d) $M = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

e) $M = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

f) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 7\}$.

E9. Să se rezolve în \mathbb{Z}_3 sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x + \hat{1} = y \\ y + \hat{1} = \hat{2}x \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{1} = y \\ x + \hat{2} = y \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + y = \hat{0} \end{cases}$.

E10. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră operația algebrică $x \perp y = x + y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $2007 \perp 2008$.

b) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x \perp x^2 \leq 3$.

c) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii:

$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid (C_n^0 \perp C_n^1) \perp C_n^2 = n + 6 \right\}$.

Varianta 58, M_2 , Bacalaureat 2008

E11. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și legea de compoziție $x \perp y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G$.

a) Să se rezolve în G ecuația $x \perp x = \frac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x \perp y = \frac{(x+1)(y+1) - (x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1) + (x-1)(y-1)}, \forall x, y \in G$.

c) Să se arate că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1, \forall x, y \in G$.

Varianta 60, M_2 , Bacalaureat 2008

A1. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = 3^x + 3^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze: $2 \circ 1, (-1) \circ 0, 2 \circ (-1), (3 \circ 0) \circ 1$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ știind că $2 \circ n = 18$.

c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuațiile: $x \circ 2 = 90, x \circ (-x) = 2, x \circ (2x) = 12$.

d) Să se rezolve în \mathbb{R} sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x \circ y = 6 \\ x \circ 2 = 2 \circ y \end{cases}$$

A2. Fie $M = \{1, 2\}$ și $\mathcal{P}(M)$ familia părților lui M . Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ se definește legea de compoziție $A \circ B = A \cup B \cup \{1\}$.

a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție " \circ ".

b) Să se determine $A \in \mathcal{P}(M)$ în cazurile: $A \circ A = \{1\}, A \circ 2 = M, A \circ \{1, 2\} = M$.

A3. Pe mulțimea \mathbb{Z}_3 se consideră operația algebrică $x \circ y = xy + x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_3$.

a) Să se alcătuiască tabla operației " \circ ".

b) Să se calculeze $\hat{2} \circ \hat{2}, (\hat{2} \circ \hat{2}) \circ \hat{2}, ((\hat{2} \circ \hat{2}) \circ \hat{2}) \circ \hat{2}$.

c) Să se rezolve ecuațiile în \mathbb{Z}_3 : $x \circ \hat{1} = \hat{2}, \hat{1} \circ x = \hat{0}, (\hat{1} \circ x) \circ \hat{2} = \hat{1}$.

d) Să se rezolve sistemul de ecuații în \mathbb{Z}_3 :
$$\begin{cases} x \circ y = \hat{2} \circ \hat{1} \\ (x + \hat{1}) \circ \hat{2} = y \end{cases}$$

A4. Pe mulțimea \mathbb{N} se definește legea de compoziție $x \perp y = C_{x+y}^x, \forall x, y \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $2 \perp 3, 4 \perp 3, (2 \perp 2) \perp 1$.

b) Să se compare numerele $a = 5 \perp 10$ și $b = 10 \perp 5$.

c) Să se rezolve ecuațiile în \mathbb{N} : $2 \perp x = 10, x \perp 2 = 36, x \perp 3 = 5(x + 3)$.

A5. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră operația algebrică " \circ " având tabla în figura alăturată.

\circ	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

a) Să se determine: $a = 1 \circ (2 \circ 3), b = 4 \circ (3 \circ 2), c = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 4, 4 \circ x = 2, x \circ 2 \circ x = 1$.

c) Să se rezolve sistemele de ecuații:
$$\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x' \end{cases} \begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x + 1) \circ y = 1 \end{cases}$$

A6. Să se alcătuiască tabla operației " \circ " pe mulțimea M în cazurile:

a) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}, x \circ y = \frac{x + y + |x - y|}{2}$;

b) $M = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;

c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $x \circ y = \max(x, y) - \min(x, y)$;

d) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 5\}$, $x \circ y = \begin{cases} x, & x + y \leq 7 \\ y, & x + y > 7 \end{cases}$.

A7. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție:

$$x \perp y = \log_2(2^x + 2^y - 1), \forall x, y \in M.$$

a) Să se calculeze: $0 \perp 0, 1 \perp 0$.

b) Să se calculeze: $a = (\log_2 5) \perp (\log_2 4)$, $b = (\log_2 11) \perp (\log_2 22)$, $c = ((\log_2 5) \perp (\log_2 6)) \perp \log_2 7$.

c) Rezolvați în M ecuațiile: $(\log_2 x) \perp (\log_2 7) = 4$, $(x \perp 1) \perp 1 = 2$.

A8. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se consideră operația algebrică $x \perp y = x^{\log_2 y}$, $\forall x, y \in M$.

a) Să se calculeze: $2 \perp 2, 2 \perp 8, 8 \perp 4, 4 \perp \sqrt{2}, 8 \perp \sqrt[3]{2}$.

b) Să se arate că pentru oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $2^m \perp 2^n = 2^{mn}$.

c) Dacă $a_n = 2^n \perp 2^{n+1}$, să se calculeze $b_{10} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}$.

d) Să se calculeze $c_n = 2^1 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp \dots \perp 2^n$, compunerea făcându-se de la stânga la dreapta.

A9. Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operațiile de adunare și înmulțire.

A10. Se consideră mulțimea $M \subset \mathbb{R}$, $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$. Să se arate că M este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu operația de înmulțire.

A11. Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

A12. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1 - a$ și $\mathcal{M} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că mulțimea \mathcal{M} este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

A13. Pe mulțimea $G = [3, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \perp y = xy - 3x - 3y + 12$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se arate că $x \perp y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $\forall x, y \in G$.

- b) Să se arate că G este parte stabilă în raport cu legea " \perp ".
- c) Să se verifice egalitățile: $x \perp x = (x - 3)^2 + 3$, $(x \perp x) \perp x = (x - 3)^3 + 3$, $\forall x \in G$.
- d) Să se demonstreze că $x \perp 3 = 3$ și $3 \perp x = 3$, $\forall x \in G$.
- e) Să se calculeze $11 \perp 10 \perp 9 \perp \dots \perp 4 \perp 3$, operațiile fiind efectuate de la stânga la dreapta.
- f) Să se rezolve ecuațiile: $x \perp 5 = 9$, $4 \perp x = 16$, $(4 \perp x) \perp 4 = 9$.
- g) Să se demonstreze că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
- $$\underbrace{x \perp x \perp \dots \perp x}_{n \text{ termeni}} = (x - 3)^n + 3, \forall x \in G.$$

1.2. Proprietăți ale legilor de compoziție

Noțiuni teoretice

Fie " \perp ": $M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție pe M .

Legea de compoziție " \perp " se numește **comutativă** pe M dacă $x \perp y = y \perp x$, $\forall x, y \in M$.

Legea de compoziție " \perp " se numește **asociativă** pe M dacă $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$, $\forall x, y, z \in M$.

O mulțime înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție, care satisfac un set de axiome date sub formă de identități sau alte condiții formează o **structură algebrică**.

Se numește **semigrup** o pereche (S, \perp) formată dintr-o mulțime nevidă S și o lege de compoziție " \perp " definită pe S care îndeplinește axioma de asociativitate:

$$S_1: (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z), \forall x, y, z \in S.$$

Un semigrup (S, \perp) se numește **semigrup comutativ** sau **abelian** dacă are loc axioma de comutativitate:

$$S_2: x \perp y = y \perp x, \forall x, y \in S.$$

Legea de compoziție " \perp ": $M \times M \rightarrow M$ admite element neutru pe M dacă există $e \in M$ astfel încât $x \perp e = e \perp x = x$, $\forall x \in M$, (1).

Elementul $e \in M$ cu proprietatea (1) se numește **element neutru** în raport cu legea " \perp ".

Perechea (M, \perp) se numește **monoid** dacă verifică axiomele:

$$(M_1) \text{ Axioma asociativității: } (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z), \forall x, y, z \in M;$$

$$(M_2) \text{ Axioma elementului neutru: } \exists e \in M \text{ astfel încât } x \perp e = e \perp x = x, \forall x \in M.$$

Un monoid (M, \perp) se numește **monoid comutativ** sau **abelian** dacă legea " \perp " este comutativă.

Un element $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea " \perp " dacă $\exists x' \in M$ cu proprietatea că $x \perp x' = x' \perp x = e$, (2).

Elementul $x' \in M$ cu proprietatea (2) se numește **simetricul** lui x în raport cu legea " \perp ".

Se notează $\mathcal{M}(M)$ mulțimea elementelor din M simetrizabile în raport cu legea " \perp ". Mulțimea $\mathcal{M}(M)$ se numește **mulțimea unităților** lui M .

Au loc egalitățile: $(x')' = x$ și $(x \perp y)' = y' \perp x'$, $\forall x, y \in \mathcal{M}(M)$.

1.2.1. Comutativitate. Asociativitate

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze comutativitatea legii de compoziție " \perp " pe mulțimea M , în cazurile:

- $M = \{1, 2, 3\}$, $x \perp y = \min(x, y)$;
- $M = \{1, 2, 4, 6\}$, $x \perp y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;
- $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $x \perp y = |x - y|$;
- $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| \leq 2\}$, $x \perp y = \text{sign}(xy)$;
- $M = \{1, 2, 4, 8\}$, $x \perp y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y)$;
- $M = \{0, 1, 2\}$, $x \perp y = x + y - xy$.

E2. Să se studieze comutativitatea legii de compoziție " \perp " pe mulțimea M în cazurile:

- $M = \mathbb{Z}$, $x \perp y = 2x + 2y - xy$;
- $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$;
- $M = \mathbb{N}$, $x \perp y = x^2 + y^2 + (x - y)^2$;
- $M = \mathbb{Q}$, $x \perp y = x^2 + 1 + (1 - y)^2$;
- $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = (x - 1)(y - 1) + 1$;
- $M = \mathbb{R}^*$, $x \perp y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$.

E3. Să se studieze comutativitatea operației " \perp " pe mulțimea M , în cazurile:

- $M = \mathbb{Z}_3$, $x \perp y = x - \hat{2}y$;
- $M = \mathbb{Z}_4$, $x \perp y = \hat{2}(x - y)$;
- $M = \mathbb{Z}_5$, $x \perp y = \hat{2}x - \hat{3}y + \hat{3}$;

d) $M = \mathbb{Z}_6, x \perp y = 2(x - 3)^2 + 4(y + 3)^2;$

e) $M = \mathbb{Z}_{10}, x \perp y = (x - 5)^2 + (y + 5)^2;$

f) $M = \mathbb{Z}_{12}, x \perp y = (x - 3)(y + 9) + 11.$

E4. Să se studieze asociativitatea operației " \perp " pe mulțimea M , în cazurile:

a) $M = \mathbb{Z}, x \perp y = x + y - 1;$

b) $M = \mathbb{R}, x \perp y = x + y + 7;$

c) $M = \mathbb{R}, x \perp y = xy + x + y;$

d) $M = \mathbb{Q}, x \perp y = 2xy + x + y;$

e) $M = \mathbb{R}, x \perp y = (x - 1)(y - 1) + 1;$

f) $M = (3, +\infty), x \perp y = (x - 3)(y - 3) + 3;$

g) $M = (-1, +\infty), x \perp y = xy + x + y;$

h) $M = \mathbb{Q}, x \perp y = 7xy;$

i) $M = \mathbb{C}, x \perp y = x + y + ixy;$

j) $M = \mathbb{C}, x \perp y = (x - i)(y - i) + i.$

E5. Să se studieze asociativitatea și comutativitatea operației " \perp " definite pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, în cazurile:

a) $A \perp B = A + B + I_2;$

b) $A \perp B = AB - 2(A + B) + 2I_2;$

c) $A \perp B = AB + BA;$

d) $A \perp B = (A + I_2)(B + I_2) - I_2.$

E6. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră operația $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Să se studieze asociativitatea operației " \circ ".

b) Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 + 7 = y^3 \end{cases}, \begin{cases} x \circ y \circ (-3) = 2 \\ x^3 + 19 = y^3 \end{cases}$$

APROFUNDARE

A1. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + a + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că legea de compoziție " \circ " este asociativă dacă și numai dacă este comutativă.

- A2.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție $x \perp y = x + ay + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}$, este asociativă pe \mathbb{Z} .
- A3.** Să se determine parametrii reali pentru care următoarele operații sunt asociative pe M :
- $M = \mathbb{Z}, x \perp y = xy + x + y + a;$
 - $M = \mathbb{R}, x \perp y = xy + ax + y;$
 - $M = \mathbb{Q}, x \perp y = x + y + axy;$
 - $M = \mathbb{R}, x \perp y = xy + ax + y + b.$
- A4.** Să se studieze asociativitatea legii de compoziție " \circ " definită pe mulțimea M , în cazurile:
- $M = \mathbb{R}, x \circ y = x + y - \frac{1}{2}xy;$
 - $M = \mathbb{R}, x \circ y = \sqrt[3]{xy};$
 - $M = \mathbb{Z}, x \circ y = \min(x, y);$
 - $M = \mathbb{N}^*, x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y);$
 - $M = \mathbb{N}^*, x \circ y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y);$
 - $M = (0, +\infty), x \circ y = 2^{\log_2 x \cdot \log_2 y}.$
- A5.** Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definește operația algebrică $x \perp y = xy + x + y + a$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}_6$ pentru care " \perp " este asociativă pe \mathbb{Z}_6 .
- A6.** Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție:
 $(x, y) \perp (a, b) = (xa, ya + b), \forall a, b, x, y \in \mathbb{Z}$.
- Să se calculeze: $(1, 2) \perp (0, 1), (2, -1) \perp (-1, 3)$.
 - Să se studieze comutativitatea și asociativitatea operației " \perp ".
- A7.** Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $(x, y) \perp (a, b) = (x + a, y + b), \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că operația " \perp " este comutativă și asociativă pe E .
- A8.** Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră operația $A \circ B = -2A - 2B + AB + 4I_2, \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Să se calculeze: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - Să se arate că legea " \circ " nu este comutativă pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Dacă $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ să se arate că " \circ " este comuta-

tivă și asociativă pe G .

d) Să se calculeze $S_n = A(1) \circ A(2) \circ \dots \circ A(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A9. Pe mulțimea \mathbb{Z}_5 se definește operația $x \circ y = xy + \hat{2}x + \hat{2}y + a$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_5$.

a) Pentru care valori $a \in \mathbb{Z}_5$ are lor relația $(\hat{2} \circ a) \circ a^2 = \hat{2} \circ (a \circ a^2)$?

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care operația " \circ " este asociativă.

1.2.2. Element neutru. Elemente simetrizabile

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă următoarele operații admit element neutru pe mulțimea M , în cazurile:

a) $M = \mathbb{N}^*$, $x \perp y = x + y - 1$;

b) $M = \mathbb{Z}$, $x \perp y = x + y - 5$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = xy + x + y$;

d) $M = \mathbb{Q}$, $x \perp y = xy - x - y + 2$;

e) $M = (3, +\infty)$, $x \perp y = xy - 3(x + y) + 12$;

f) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

g) $M = \mathbb{C}$, $x \perp y = x + y + ixy$;

h) $M = (-1, 1)$, $x \perp y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

E2. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se consideră operația $x \circ y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se studieze asociativitatea operației " \circ ".

b) Să se arate că (G, \circ) este monoid comutativ.

c) Să se arate că $x \circ (-x) = 0$, $\forall x \in G$.

E3. Să se verifice dacă următoarele operații admit element neutru pe mulțimea M și să se determine mulțimea elementelor simetrizabile:

a) $M = (3, +\infty)$, $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$;

b) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y + 2xy$;

c) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = x + y - 4xy$;